

Spis treści

Przedmowa	11
1. Strumienie finansowe w ubezpieczeniach wielostanowych.....	19
1.1. Model wielostanowy	19
1.2. Proces opisujący dynamikę zmian stanów w modelu wielostanowym	20
1.3. Strumienie przepływów pieniężnych	22
1.4. Rodzaje ubezpieczeń wielostanowych	23
1.4.1. Ubezpieczenia na życie i renty	24
1.4.2. Ubezpieczenia od ryzyka nieszczęśliwego wypadku	29
1.4.3. Ubezpieczenia zdrowotne.....	31
1.4.4. Ubezpieczenia od ryzyka utraty pracy	37
2. Probabilistyczna i finansowa struktura modelu wielostanowego	39
2.1. Łącuchy Markowa	39
2.2. Łącuchy semi-Markowa	45
2.3. Wielostanowe tablice trwania życia	59
2.4. Wartości przepływów pieniężnych w czasie	67
2.5. Wartość aktuarialna przepływów pieniężnych	71
3. Analiza strumieni finansowych netto	76
3.1. Składki netto	76
3.2. Zobowiązania i rezerwy na ich pokrycie.....	82
3.2.1. Rezerwy matematyczne	82
3.2.2. Metoda prospektywna	83
3.2.3. Rezerwa składki netto	92
3.2.4. Metoda retrospektywna	97
3.3. Zyski i straty ubezpieczyciela	101
3.3.1. Zyskowość ubezpieczenia indywidualnego	101
3.3.2. Portfel rzeczywisty	104
4. Analiza strumieni finansowych brutto	108
4.1. Koszty ubezpieczyciela.....	108

4.1.1. Charakterystyka i klasyfikacja kosztów.....	108
4.1.2. Koszty administracyjne i akwizycyjne	110
4.1.3. Koszty realizacji świadczeń.....	113
4.2. Składki brutto.....	115
4.3. Rezerwy ubezpieczeniowe brutto	132
5. Zmodyfikowany model wielostanowy	137
5.1. Łączne przepływy pieniężne	137
5.2. Weryfikacja modelu wielostanowego	140
5.3. Konstrukcja zmodyfikowanego modelu wielostanowego.....	148
5.4. Konstrukcja zmodyfikowanego modelu wielostanowego dla szerszej klasy ubezpieczeń	162
5.4.1. Zestawy parametrów określające warunki realizacji przepływów pieniężnych.....	162
5.4.2. Horyzont czasu realizacji przepływów pieniężnych	167
5.4.3. Metoda modyfikacji modelu wielostanowego zależna od zestawów parametrów określających warunki realizacji przepływów pieniężnych.....	171
6. Analiza łącznych przepływów pieniężnych	177
6.1. Aktuarialna wartość łącznych przepływów pieniężnych	177
6.2. Macierze związane ze strumieniami przepływów pieniężnych.....	180
6.3. Macierze przepływów pieniężnych a zestawy parametrów określających warunki realizacji przepływów pieniężnych	188
6.4. Macierze związane z rozkładem procesu opisującego dynamikę zmian stanów.....	193
6.5. Macierze związane z procesem stopy procentowej	197
6.6. Macierzowa postać aktuarialnej wartości łącznych przepływów pieniężnych..	205
6.7. Aktuarialna wartość łącznych przepływów pieniężnych dla stałej stopy procentowej	213
7. Zastosowania zmodyfikowanego modelu wielostanowego	216
7.1. Ubezpieczenia indywidualne	216
7.1.1. Składki ubezpieczeniowe	216
7.1.2. Rezerwy matematyczne.....	220
7.1.3. Podział składki na część oszczędnościową i części na ryzyko.....	223
7.1.4. Zyskowność polisy	228
7.2. Ubezpieczenia grupowe	232
7.3. Indeksacja przepływów pieniężnych w pakiecie ubezpieczeń.....	236

7.4. Sformułowanie problemu optymalizacji wyboru pakietu ubezpieczeń	242
7.5. Przykłady numeryczne	246
7.5.1. Zapis macierzowy w obliczeniach.....	246
7.5.2. Ubezpieczenia na życie i renty	248
7.5.3. Ubezpieczenia zdrowotne.....	251
7.5.4. Ubezpieczenia od ryzyka utraty pracy	257
Zakończenie	261
Literatura	265
Skorowidz	271
Spis rysunków	275
Spis tabel	276
Summary	277

Przedmowa

Instytucje finansowe i ubezpieczeniowe stanowią jeden z ważniejszych sektorów gospodarki każdego kraju. Dlatego prawidłowe funkcjonowanie tego sektora znajduje się w centrum uwagi polityków gospodarczych, a także jest przedmiotem badań naukowych*. W sektorze ubezpieczeń pojawiają się nowe produkty. Coraz większą popularnością cieszą się ubezpieczenia wielostanowe. Z realizacją umów tego typu związane są różnego rodzaju przepływy środków pieniężnych, które tworzą strumienie finansowe. Niniejsze opracowanie jest poświęcone problematyce analizy tych przepływów. Najważniejszym jego celem było jednolite, formalne i usystematyzowane ujęcie całej złożonej problematyki ubezpieczeń wielostanowych. Ogólnie zostało ono określone jako modelowanie strumieni finansowych.

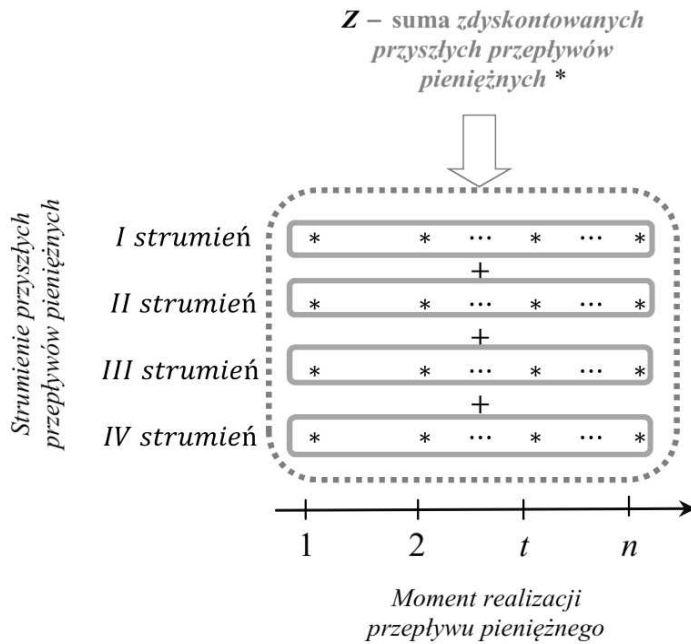
Ze względu na zastosowania praktyczne w pracy rozważany jest *model dyskretny*, gdzie płatności ubezpieczeniowe są realizowane na końcu jednostek czasu, na jakie został podzielony okres ubezpieczenia. Ponadto przyjęto, że stopa procentowa jest losowa, modelowana przez proces stochastyczny. Na temat dyskretnego modelu realizacji przepływów pieniężnych w literaturze aktuarialnej istnieją prace, w których przyjmuje się założenie, że proces stopy procentowej jest procesem dyskretnym lub ciągłym. W opracowaniu podstawą analizy przepływów pieniężnych jest założenie, że proces stopy procentowej jest modelowany przez ciągły proces stochastyczny.

Jednym z kluczowych zagadnień aktuarialnych, w kontekście badań strumieni finansowych zakładów ubezpieczeń, jest analiza *zdyskontowanych przyszłych przepływów pieniężnych generowanych przez strumienie składek i świadczeń wynikających z realizacji umowy ubezpieczenia*. Wielkość sumy tych przepływów pieniężnych, oznaczonej symbolem Z , stanowi jeden z podstawowych celów badania, którego wyniki przedstawiono w niniejszym opracowaniu.

* Praca naukowa finansowana ze środków na naukę w latach 2009-2011 jako projekt badawczy Nr 2293/B/H03/2009/36.

Wielkość Z mająca dość skomplikowaną strukturę stochastyczną, interpretowana jest dwojako.

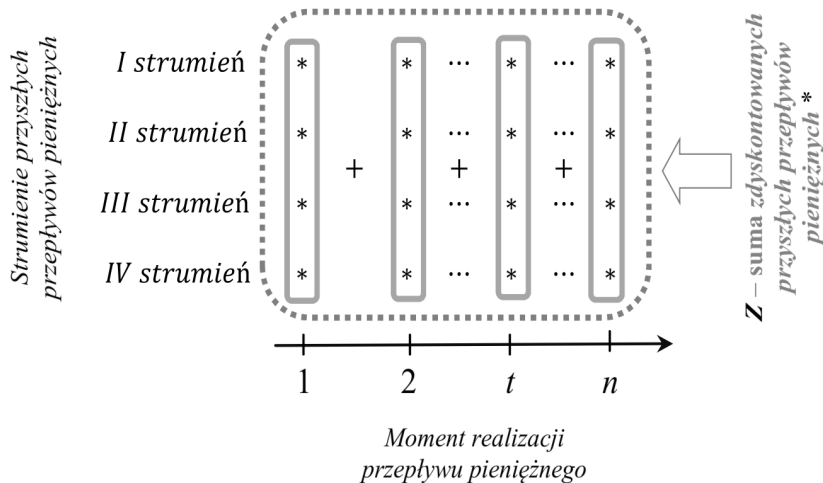
Z aktuarialnego punktu widzenia zmienna losowa Z traktowana jest jako zespół odrębnych i niezależnych strumieni (składek i różnego rodzaju świadczeń), stanowiąc ich łączną wartość zaktualizowaną. Istota tego podejścia została przedstawiona schematycznie na rys. 0.1.



Rys. 0.1. Podejście aktuarialne do analizowania przepływów pieniężnych

Z finansowego punktu widzenia ta łączna wartość zaktualizowana traktowana jest jako suma aktualnych wartości łącznych przepływów pieniężnych realizowanych w poszczególnych momentach trwania umowy ubezpieczenia, przy czym łączny przepływ pieniężny jest sumą składek i świadczeń realizowanych w danym momencie okresu ubezpieczenia. Istota tego podejścia została przedstawiona schematycznie na rys. 0.2.

Rozróżnienie tych dwóch odrębnych sposobów analizy wielkości Z jest szczególnie istotne wówczas, gdy umowa ubezpieczenia zawiera jednorazowe świadczenia bezpośrednio związane z zajściem zdarzenia losowego objętego umową ubezpieczenia. Do wyznaczenia wartości aktualnej takiego świadczenia, oprócz informacji o bieżącym stanie (np. ubezpieczony nie żyje), niezbędna jest informacja o stanie wcześniejszym (np. czy ubezpieczony, umierając, był



Rys. 0.2. Podejście finansowe do analizowania przepływów pieniężnych

zdrowy, czy chory), gdyż od tego może zależeć wysokość świadczenia. Dla takich jednorazowych świadczeń wartość aktualna jest definiowana na podstawie informacji o stanie wcześniejszym i bieżącym, podczas gdy do określenia wartości aktualnej pozostałych rodzajów przepływów pieniężnych wystarczy jedynie informacja o stanie bieżącym. Jeżeli strumienie poszczególnych rodzajów przepływów pieniężnych są rozpatrywane oddzielnie, to wartość aktualna Z może być łatwo określona. Nie jest to możliwe, jeśli strumienie składek i strumienie świadczeń są rozważane równocześnie. Z tego powodu, w opracowaniach dotyczących analizy strumieni przepływów pieniężnych z finansowego punktu widzenia, na ogół nie są rozpatrywane jednorazowe świadczenia związane ze zmianą stanów. Uwzględnienie tego rodzaju świadczeń w analizie ubezpieczeń wielostanowych z finansowego punktu widzenia stało się jedną z motywacji powstania niniejszego opracowania.

W celu pełnej analizy wielkości Z z finansowego punktu widzenia przedstawiono modyfikację tradycyjnego modelu wielostanowego. Istota modyfikacji polega na odpowiednim rozbudowaniu przestrzeni stanów w taki sposób, aby wysokość przepływów pieniężnych zależała od bieżącej sytuacji ubezpieczonego oraz czasu, jaki upłynął od momentu wykupienia ubezpieczenia.

Na podstawie *zmodyfikowanego modelu wielostanowego* udało się przedstawić *zasadę równoważności* w zwartej postaci macierzowej. To z kolei pozwoliło wyprowadzić macierzowe wzory na składki netto oraz rezerwy ubezpieczeniowe.

Na bazie zmodyfikowanego modelu wielostanowego udało się wyprowadzić macierzowy odpowiednik *równania różniczkowego Thielego dla ubezpieczeń wielostanowych w modelu dyskretnym*, dzięki któremu uzyskano macierzową reprezentację wzorów przedstawiających składkę okresową w postaci sumy składki oszczędnościowej i składek na ryzyko, oddzielnie dla dodatniej i ujemnej kwoty netto podlegającej ryzyku.

Ponadto okazało się, że macierzowa postać wzorów określających *oczekiwane przepływy pieniężne* oraz *oczekiwane zyski* znacznie ułatwia dokładne kontrolowanie przychodów i wydatków w każdym momencie okresu ubezpieczenia.

Wykorzystanie notacji macierzowej umożliwiło formułowanie problemów i zagadnień aktuarialnych w prostszy, z interpretacyjnego i obliczeniowego punktu widzenia, sposób. W odniesieniu do *ubezpieczeń grupowych* w opracowaniu pokazano, jak zapis macierzowy wykorzystuje się w analizie wpływu wielkości portfela polis na wysokość składki i narzutu bezpieczeństwa, zarówno dla grupy jednorodnej, jak i niejednorodnej.

W odniesieniu do *zabezpieczeń ubezpieczenia przed skutkami inflacji*, notacja macierzowa użyta została do określenia warunku równoważności dla rezerwy ubezpieczeniowej. Pozwoliło to na analizę zależności między stopami indeksacji świadczeń, składek i rezerw, a w konsekwencji uprościło sposoby konstruowania ubezpieczeń odpornych na inflację oraz dostosowania wysokości świadczeń do zmieniających się zarobków ubezpieczonego.

W opracowaniu pokazano także, w jaki sposób można wykorzystać macierzowy zapis do formułowania problemu *wyboru optymalnego portfela polis*. Sformułowano problem optymalizacji ubezpieczenia polegający na właściwym doborze wysokości ubezpieczenia dobrowolnego, tak aby wysokość świadczeń i składek maksymalizowała przeciętną wysokość funduszy, którymi dysponuje ubezpieczony. Zagadnienie to zostało sformułowane zarówno w kontekście łączenia ubezpieczeń dobrowolnych z socjalnymi, jak i tworzenia optymalnego portfela polis przez indywidualną osobę, przy uwzględnieniu jej wynagrodzenia za pracę.

W niniejszym opracowaniu zaproponowano także alternatywny sposób modyfikacji tradycyjnego modelu wielostanowego oparty na zestawach parametrów opisujących warunki realizacji każdego typu przepływu pieniężnego. Zaproponowany sposób modyfikacji umożliwił zastosowanie zapisu macierzowego do szerszej klasy ubezpieczeń wielostanowych. Tak sformułowany sposób modyfikacji umożliwił analizę ubezpieczeń, w których realizacja przepływów pieniężnych jest uwarunkowana przez: karencję, okres odroczenia czy maksymalną liczbę wypłaconych świadczeń. Ponadto stało się możliwe uwzględnienie świadczeń wypłacanych po zakończeniu umowy ubezpieczenia, a w konsekwen-

cji określanie horyzontu czasu, w jakim powinny być rozpatrywane strumienie finansowe wynikające z zawarcia umowy ubezpieczenia.

Monografia składa się z dwóch części.

Pierwsza część, obejmująca rozdziały 1-4, poświęcona jest analizowaniu strumieni składek i świadczeń z aktuarialnego punktu widzenia. Na bazie tradycyjnego modelu wielostanowego, zaproponowano formuły na wielkości aktuarialne na tyle ogólne, aby mogły być zastosowane do każdego rodzaju ubezpieczeń wielostanowych i pozwalały na wszechstronną analizę strumieni finansowych powstających w wyniku realizacji tego typu umów. Niekiedy wymagało to zaadaptowania (lub uogólnienia) metod aktuarialnych stosowanych w ubezpieczeniach na życie do ogólnych ubezpieczeń wielostanowych.

W rozdziale 1 omówiono podstawowe pojęcia wykorzystywane w kolejnych rozdziałach. Zdefiniowano model wielostanowy oraz proces stochastyczny opisujący dynamikę zmian stanów. Ponadto określono typy przepływów pieniężnych wynikających z realizacji umowy ubezpieczenia wielostanowego, a także dokonano klasyfikacji ubezpieczeń wielostanowych.

W rozdziale 2 scharakteryzowano strukturę probabilistyczną i finansową modelu wielostanowego. Sformułowano także podstawowe założenia wykorzystywane w całej pracy.

W rozdziale 3 omówiono strumienie finansowe netto. Podano ogólne formuły na wyznaczenie składek netto oraz ich rozbiecie na część oszczędnościową i części na ryzyko. Wyprowadzono wzory na rezerwy obliczane metodą prospektywną i retrospektywną oraz wielkości aktuarialne istotne w testach zyskowności. Omówiono także zyski (lub straty) w portfelu polis, wynikające z różnicy planowanej i zaobserwowanej w rzeczywistości liczby osób pobierających świadczenia.

W rozdziale 4 dokonano analizy strumieni finansowych brutto. W formułach na wysokości składek i rezerw uwzględniono koszty zawarcia i prowadzenia ubezpieczenia. Uzyskano ogólny wzór na składkę brutto i rezerwy prospektywne brutto dla ubezpieczeń wielostanowych w modelu dyskretnym.

Druga część, obejmująca rozdziały 5-7, poświęcona jest analizowaniu strumieni składek i świadczeń z finansowego punktu widzenia. Przedstawiono własną propozycję sposobu analizowania strumieni przepływów pieniężnych wynikających z realizacji umów ubezpieczeń wielostanowych opartą na zmodyfikowanym modelu wielostanowym. Takie podejście umożliwiło wprowadzenie notacji macierzowej w zapisie formalnym wielkości aktuarialnych, co w efekcie stało się użytecznym narzędziem ułatwiającym interpretację i zastosowanie teorii w praktyce.

W rozdziale 5 przedstawiono procedurę modyfikacji tradycyjnego modelu wielostanowego. Dla poszczególnych typów przepływów pieniężnych zdefinio-

wano zestawy parametrów opisujące szczegółowe warunki ich realizacji. Dzięki wprowadzeniu tych zestawów parametrów stało się możliwe określenie alternatywnego sposobu uzyskania zmodyfikowanego modelu wielostanowego, który może być zastosowany do szerszej klasy ubezpieczeń wielostanowych. Pokazano, w jaki sposób zestawy parametrów umożliwiają określanie horyzontu czasu, w jakim powinny być analizowane przepływy pieniężne, aby uwzględnione zostały świadczenia, których realizacja następuje po zakończeniu okresu ubezpieczenia, jest odroczone w czasie lub ograniczona. Zdefiniowano łączne przepływy pieniężne wynikające z realizacji umowy ubezpieczenia, które są modelowane przez zmodyfikowany model wielostanowy.

W rozdziale 6 określono wartości aktualną i aktuarialną sumy zdyskontowanych przyszłych przepływów pieniężnych generowanych przez strumienie składek i świadczeń wynikających z realizacji umowy ubezpieczenia dla zmodyfikowanego modelu wielostanowego. Wprowadzono notację macierzową do określenia stochastycznej struktury oraz przepływów pieniężnych. W konsekwencji uzyskano macierzowy zapis momentów zmiennej losowej \mathcal{Z} zarówno dla stochastycznej, jak i stałej stopy procentowej.

Rozdział 7 w całości poświęcony jest zastosowaniom zmodyfikowanego modelu wielostanowego. Określono wzory macierzowe na wyznaczenie: składek netto i ich rozbitcia na część oszczędnościową i części na ryzyko oraz rezerwy prospektywne dla ubezpieczeń indywidualnych. Przedstawiono także macierzowe formuły na wielkości aktuarialne wykorzystywane w testach zyskowności.

Dla ubezpieczeń grupowych wyprowadzono wzory na wartość średnią i wariancję sumy zdyskontowanych przyszłych przepływów pieniężnych określonych zarówno dla grupy jednorodnej jak i niejednorodnej (w przypadku małego i dużego portfela polis).

Dokonano analizy zagadnień dotyczących związków między stopami indeksacji świadczeń, składek i rezerw (np. w celu pokazania, że przy pewnych warunkach stopa indeksacji dla rezerw jest średnią ważoną stóp indeksacji składek i świadczeń).

Pokazano, że postać macierzowa momentów zmiennej losowej \mathcal{Z} może być przydatna także do formułowania zagadnienia dotyczącego wyboru optymalnego portfela polis przez osobę indywidualną, w kontekście łączenia zarówno ubezpieczeń dobrowolnych, jak i ubezpieczenia dobrowolnego z socjalnym.

W ostatnim paragrafie zamieszczono przykłady numeryczne świadczące o łatwym zastosowaniu proponowanych rozwiązań w praktyce.

Chciałabym wyrazić wdzięczność Panu Profesorowi Walentemu Ostasiewiczowi, który gorąco zachęcał mnie do napisania niniejszej pracy i z wielką

życzliwością wspierał realizację tego zadania. Chciałabym także serdecznie podziękować Recenzentom, Panu Profesorowi Tomaszowi Michalskiemu i Panu Profesorowi Wojciechowi Otto za wnikliwe recenzje i życzliwe uwagi, dzięki którym możliwe było uniknięcie wielu błędów.